Durée : 4 heures Coefficient : 6

- PROBLEME N° 1 -

1) Soit l'équation différentielle (E_r) $\begin{cases} \sqrt{1-x}\ f'(x) = x^r & r \in \mathbb{R} \\ f(\frac{1}{2}) = 0 \end{cases}$

a) Déterminer la solution de (E_0), préciser son domaine de définition.

b) Déterminer la solution de (E_1), préciser son domaine de définition.

c) Déterminer les solutions de (E_{-1}), préciser leur domaine de définition.

d) Etablir pour $x \in]0, 1[$ une relation de récurrence entre la solution de (E_r) et celle de (E_{r-1}).

e) En déduire la solution de $\left(E_{-\frac{3}{2}}\right)$.

2) a) Soit $H(x) = \int_0^1 \frac{h(ux)}{\sqrt{1-u}}\,du$ où h est une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$; montrer avec soin que H(x) est continue sur $]0, +\infty[$.

b) Soit $K(x) = \int_0^1 \frac{u\,h'(ux)}{\sqrt{1-u}}\,du$ où h' est la dérivée continue d'une fonction h de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$; montrer en le justifiant que K(x) est la dérivée de H(x) sur $]0, +\infty[$.

3) Soit $F(x) = \int_0^x \frac{h(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt$ où $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_F$ de F(x).

b) Etablir la continuité et la dérivabilité de F(x) sur $\mathcal{D}_F$ privé de $\{0\}$, préciser F'(x).

c) Exprimer F(x) en fonction de $h(\theta x)$ où $\theta \in [0, 1]$.

d) Etudier la continuité et la dérivabilité de F(x) en 0.

e) Si $\exists \ell \in \mathbb{R}$: $\lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x} = \ell$, trouver α et m tels que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x^\alpha} = m.$$

- PROBLEME N° 2 -

On considère les suites complexes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par leur premier terme u_0 et v_0 et par les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_n = 2a\, u_{n-1} - b\, v_{n-1} \\ v_n = u_{n-1} \end{cases} \qquad \text{où } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

1) Montrer que pour (a, b) fixés l'ensemble décrit par $w_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ quand $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ décrit $\mathbb{C}^2$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ dont on discutera la dimension selon les valeurs de (a, b).

2) .Trouver (a_0, b_0) tels que (u_n) soit une suite arithmétique. Calculer alors u_n en fonction de u_0, v_0 et n.

.Pour $(-a_0, b_0)$ exprimer les termes généraux de (u_n) et (v_n). On pourra utiliser $u'_n = (-1)^n u_n$.

3) Pour $a^2 \neq b$, en notant $w_n = A\, w_{n-1}$ trouver les valeurs propres de la matrice A et calculer A^n.

Pour $a = \sqrt{b}\cos t$, $t \in]-\pi, \pi[$ exprimer simplement u_n et v_n en fonction de u_0, v_0, n et t; puis pour $u_0 = \sqrt{b}\cos t$ et $v_0 = 1$ exprimer $(w^*_n) = \begin{pmatrix} u^*_n \\ v^*_n \end{pmatrix}$ en fonction de n et t.

4) Former l'équation différentielle vérifiée par $f(t) = u^*_n(t)$ de la question précédente. Que devient cette équation différentielle si on fait le changement de variable t = arc cos x ?